【チャレンジ！3】

「新聞紙」や「ダンスが済んだ」のように、前から読んでも後ろから読んでも、同じになる文を回文といいます。これと同じように、数字を使った「回文数」を考えます。

(1) 252 のような 3 桁の回文数と、6776 のような 4 桁の回文数を考えるとき、3 桁の回文数の個数を a とし、4 桁の回文数の個数を b とします。a と b の関係を求めなさい。

(2) 5 桁の回文数の個数と、6 桁の回文数の個数の関係を求めなさい。

(3) 以上のことから、どのようなことが成り立つと予想できますか。また、その予想が正しいことを説明しなさい。

【解答】

（9 通り）	（10 通り）	（1 通り）
百の位	十の位	一の位
	0	1
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	5	1
6	6	1
7	7	1
8	8	1
9	9	1

(1)

3 桁の回文数について、
百の位から順に、各位の数の選び方を考える（右図）。
百の位の数は、0 はあてはまらないので、
1～9 の 9 通りが考えられる。
百の位のそれぞれの数に対して、
十の位の数は、0～9 の 10 通りが考えられる。
回文であるため、一の位の数と百の位の数は等しいから、
一の位の数は、1 通りの選び方である。
だから、3 桁の回文数の個数は 9×10×1=90 で、
90 個であり、a=90 である。

次に、4 桁の回文数について、
千の位から順に、各位の数の選び方を考える。
千の位の数は、0 はあてはまらないので、
1～9 の 9 通りが考えられる。
千の位のそれぞれの数に対して、百の位の数は、0～9 の 10 通りが考えられる。
回文であるため、十の位の数と百の位の数は等しく、一の位の数と千の位の数は等しいから、
十の位の数と一の位の数は、それぞれ 1 通りの選び方である。
だから、4 桁の回文数の個数は 9×10×1×1=90 で、
90 個であり、b=90 である。

以上のことから、a=b である。

(2)

(1) と同じように考えると、
5 桁の回文数の個数は、
9×10×10×1×1=900 で、900 個である。
6 桁の回文数の個数は、
9×10×10×1×1×1=900 で、900 個である。
だから、5 桁の回文数の個数と 6 桁の回文数の個数は等しい。

<u>3 桁と 4 桁の回文数について</u>

$\boxed{\begin{array}{l}2\ 5\\2\ 5\end{array}}\begin{array}{l}2\\5\ 2\end{array}$

↓

前の 2 桁の数が決まれば、
回文数が 1 通りに決まる。

<u>5 桁と 6 桁の回文数について</u>

$\boxed{\begin{array}{l}4\ 5\ 6\\4\ 5\ 6\end{array}}\begin{array}{l}5\ 4\\6\ 5\ 4\end{array}$

↓

前の 3 桁の数が決まれば、
回文数が 1 通りに決まる。

(3)
予想：ある奇数を n としたとき、n 桁の回文数の個数と、n+1 桁の回文数の個数は等しい。

(1)、(2) での考えをもとにすると、
ある奇数を n としたときの n 桁の回文数の個数と、
n+1 桁の回文数の個数は、それぞれ次のように考えることができる。

3 桁の回文数の真ん中の位
↓

3 桁の回文数　9×10 ×1
4 桁の回文数　9×10 ×1×1

5 桁の回文数の真ん中の位
↓

5 桁の回文数　9×10×10 ×1×1
6 桁の回文数　9×10×10 ×1×1×1

n 桁の回文数の真ん中の位
↓

n 桁の回文数　9×10×10×…×10 ×1×1×…× 1
n+1 桁の回文数　9×10×10×…×10 ×1×1×1×…× 1

だから、ある奇数を n としたとき、n 桁の回文数の個数と、n+1 桁の回文数の個数は等しい。

チャレンジ！3 の問題は、次の方法で考えることもできます。
少し難しいですが、チャレンジしてみましょう！

3 桁の回文数と 4 桁の回文数の関係について考える。
3 桁の回文数について、例えば、252 の 5 を隣の位に付け足すと、
2552 という 4 桁の回文数ができる。
このように考えると、
3 桁の回文数はすべて 4 桁の回文数に対応させることができる。
次に、4 桁の回文数について、例えば、6776 の 7 を取り除くと、
676 という 3 桁の回文数ができる。
このように考えると、
4 桁の回文数はすべて 3 桁の回文数に対応させることができる。
以上のことから、3 桁の回文数と 4 桁の回文数は、
右のように 1 つずつ対応していることがわかる。
だから，3 桁の回文数の個数と 4 桁の回文数の個数は等しいといえる。

3 桁		4 桁
101	⇔	1001
111	⇔	1111
121	⇔	1221
⋮		⋮
252	⇔	2552
⋮		⋮
676	⇔	6776
⋮		⋮
999	⇔	9999

この方法で考えると、5 桁と 6 桁の回文数の個数が等しく、
n 桁と n+1 桁の回文数（n はある奇数）の個数が等しいことも説明することができます。