

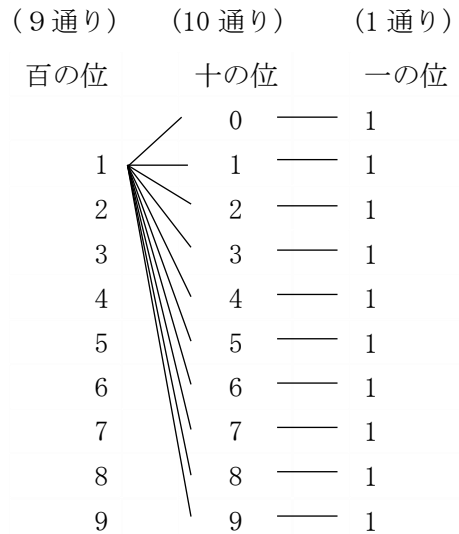
【チャレンジ!3】

「新聞紙」や「ダンスが済んだ」のように、前から読んでも後ろから読んでも、同じになる文を回文といいます。これと同じように、数字を使った「回文数」を考えます。

- (1) 252 のような 3 桁の回文数と、6776 のような 4 桁の回文数を考えるとき、3 桁の回文数の個数を a とし、4 桁の回文数の個数を b とします。 a と b の関係を求めなさい。
- (2) 5 桁の回文数の個数と、6 桁の回文数の個数の関係を求めなさい。
- (3) 以上のことから、どのようなことが成り立つと予想できますか。また、その予想が正しいことを説明しなさい。

【解答】

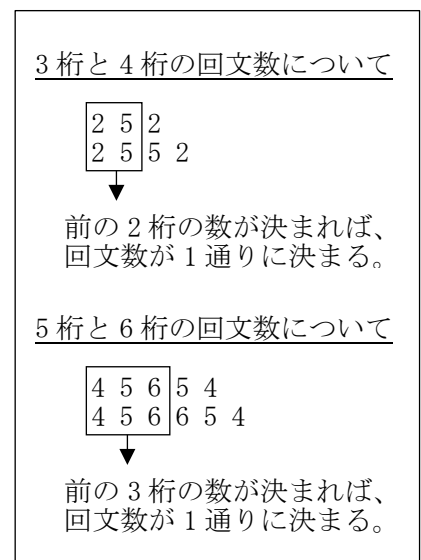
(1)
3 桁の回文数について、
百の位から順に、各位の数の選び方を考える (右図)。
百の位の数は、0 はあてはまらないので、
1~9 の 9 通りが考えられる。
百の位のそれぞれの数に対して、
十の位の数は、0~9 の 10 通りが考えられる。
回文であるため、一の位の数と百の位の数は等しいから、
一の位の数は、1 通りの選び方である。
だから、3 桁の回文数の個数は $9 \times 10 \times 1 = 90$ で、
90 個であり、 $a=90$ である。



次に、4 桁の回文数について、
千の位から順に、各位の数の選び方を考える。
千の位の数は、0 はあてはまらないので、
1~9 の 9 通りが考えられる。
千の位のそれぞれの数に対して、百の位の数は、0~9 の 10 通りが考えられる。
回文であるため、十の位の数と百の位の数は等しく、一の位の数と千の位の数は等しいから、
十の位の数と一の位の数は、それぞれ 1 通りの選び方である。
だから、4 桁の回文数の個数は $9 \times 10 \times 1 \times 1 = 90$ で、
90 個であり、 $b=90$ である。

以上のことから、 $a=b$ である。

- (2)
(1) と同じように考えると、
5 桁の回文数の個数は、
 $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 900$ で、900 個である。
6 桁の回文数の個数は、
 $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 900$ で、900 個である。
だから、5 桁の回文数の個数と 6 桁の回文数の個数は等しい。



(3)

予想：ある奇数を n としたとき、 n 桁の回文数の個数と、 $n+1$ 桁の回文数の個数は等しい。

(1)、(2)での考えをもとにすると、

ある奇数を n としたときの n 桁の回文数の個数と、

$n+1$ 桁の回文数の個数は、それぞれ次のように考えることができる。

3 桁の回文数の真
ん中の位



3 桁の回文数 $9 \times 10 \times 1$

4 桁の回文数 $9 \times 10 \times 1 \times 1$

5 桁の回文数の真
ん中の位



5 桁の回文数 $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1$

6 桁の回文数 $9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1$

n 桁の回文数の
真ん中の位



n 桁の回文数 $9 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$

$n+1$ 桁の回文数 $9 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$

だから、ある奇数を n としたとき、 n 桁の回文数の個数と、 $n+1$ 桁の回文数の個数は等しい。

チャレンジ！3の問題は、次の方法で考えることもできます。

少し難しいですが、チャレンジしてみましょう！

3 桁の回文数と 4 桁の回文数の関係について考える。

3 桁の回文数について、例えば、252 の 5 を隣の位に付け足すと、2552 という 4 桁の回文数ができる。

このように考えると、

3 桁の回文数はすべて 4 桁の回文数に対応させることができる。

次に、4 桁の回文数について、例えば、6776 の 7 を取り除くと、676 という 3 桁の回文数ができる。

このように考えると、

4 桁の回文数はすべて 3 桁の回文数に対応させることができる。

以上のことから、3 桁の回文数と 4 桁の回文数は、

右のように 1 つずつ対応していることがわかる。

だから、3 桁の回文数の個数と 4 桁の回文数の個数は等しいといえる。

3 桁		4 桁
101	⇔	1001
111	⇔	1111
121	⇔	1221
⋮		⋮
252	⇔	2552
⋮		⋮
676	⇔	6776
⋮		⋮
999	⇔	9999

この方法で考えると、5 桁と 6 桁の回文数の個数が等しく、

n 桁と $n+1$ 桁の回文数 (n はある奇数) の個数が等しいことも説明することができます。